## Παρατηρηση

Έστω $A=[\alpha,\beta]\subseteq\mathbb{R}$ και $H([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ ο χώρος των φραγμένων συναρτήσεων που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[\alpha,\beta]$

$$T_f=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

$T$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Επίσης, αν $\|f\|=\sup_{x\in A}|f(x)|$ τότε

αν $f\in H([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ με $\|f\|\le 1$ τότε

$$|T_f|=\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right|\le\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx\le\int_\alpha^\beta \|f\|\,dx=\|f\|(\beta-\alpha)\le(\beta-\alpha)=M$$

Άρα σύμφωνα με την Πρόταση σελ. 77 $T$ είναι συνεχής

## Προταση

Έστω $(f_n)$ συναρτήσεων του $B([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[\alpha,\beta]$ και $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο $[\alpha,\beta]$. Τότε η $f$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[\alpha,\beta]$ και επίσης ισχύει ότι $F_n\to F$ ομοιόμορφα στο $[\alpha,\beta]$, όπου

$$F_n(x)=\int_\alpha^x f_n(u)\,du \quad \text{και} \quad F(x)=\int_\alpha^x f(u)\,du.$$

## Σχεδιαγραμμα Αποδειξης

Εφόσον $(f_n)\subseteq B([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ και $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο $[\alpha,\beta]$ (άρα $f_n\xrightarrow{\rho_u} f$) έπεται ότι $f\in B([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ (διότι $B([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ κλειστό του $(F([\alpha,\beta],\mathbb{R}),\rho_u)$). Επιπλέον, κάθε $f_n$ είναι ολοκληρώομοιόμορφα στο $[a,b]$, άρα η $f_n$ είναι συνεχής παντού στο $[a,b]$ εκτός από ένα μηδενικό σύνολο $E_n$. Άρα η $f_n$ είναι συνεχής στο $A \setminus E_n$, όπου $A=[a,b]$. Το σύνολο $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Το $E$ είναι επίσης ένα μηδενικό σύνολο και κάθε $f_n$ είναι συνεχής στο $[a,b]\setminus E$. Οπότε, εφόσον, $f_n \to f$ ομ/φα στο $[a,b]$ και η $f$ είναι συνεχής στο $[a,b]\setminus E$, οπότε αφού $f$ συνεχής στο $[a,b]\setminus E$, φραγμένη στο $[a,b]$ άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Ορίζουμε $H_x = \{$σύνολο των συναρτήσεων του $B([a,x],\mathbb{R})$ που είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,x]\}$. $H_x$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $B([a,\,],\mathbb{R})$ και επιπλέον αν

$$Tf=\int_a^x f(u)\,du$$ εφόσον $T$ συνεχής και $f_n \xrightarrow{\text{ομ/φα}} f$ $Tf_n \to Tf$ ομ/φα στο $[a,b]$.

Πιο αυστηρά: Η εφόσον $f_n \xrightarrow{\text{ομ/φα}} f$ $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N}): |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall x\in[a,b]$ $\forall n\geq n_0$, άρα $\|f_n-f\|\leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall n\geq n_0$, οπότε

$$\underbrace{\int_a^x f_n(u)\,du}_{F_n(x)}-\underbrace{\int_a^x f(u)\,du}_{F(x)}=\left|\int_a^x (f_n(u)-f(u))\,du\right|\leq\int_a^x \|f_n-f\|\,du\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$$

## Πρόταση

Έστω $(f_n)$ ακολουθία του $C(A,\mathbb{R})$, όπου $A=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $[a,b]$ και $\lim_n f_n(a)=\xi\in\mathbb{R}$. Εάν $\forall n\in\mathbb{N}$ η $f_n'$ είναι συνεχής και η $(f_n')$ συγκλίνει ομ/φα προς μια συνάρτηση $g$, τότε $\exists$ μια συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ τ.ω. $f_n \to f$ ομ/φα στο $[a,b]$.

## Απόδειξη

Εφόσον $(f_n')$ είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $f_n' \xrightarrow{\text{ομ/φα}} g$

επειδή ότι $g$ συνεχής στο $[a,b]$. Άρα, $f_n', g$ $\forall n$ είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann. Επιπλέον, από υπόθεση $\lim_n f_n(a) = \xi$ $(*)$ Συνεπώς, λόγω της προηγούμενης ΠΡΟΤΑΣΗΣ

$f_n(a) + \int_a^x f_n'(u)du \to \xi + \int_a^x g(u)du$ $(*_1)$ Από Θεμ. Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού $\int_a^x f_n'(u)du = f_n(x) - f_n(a)$ $(*_2)$

Άρα από $(*_1)$ και $(*_2)$ έχουμε $f_n(x) \to \xi + \int_a^x g(u)du$ Οπότε, εάν $f(x) = \xi + \int_a^x g(u)du$, $f_n \xrightarrow{\text{ομ/φα}} f$ στο $[a,b]$. Επιπλέον, λόγω του ότι η $g$ συνεχής $\Rightarrow f$ παραγωγίσιμη.

ΑΣΚΗΣΗ

Ν.δ.ο. $\int_0^x \left(1+\frac{u}{n}\right)^n du \to e^x - 1$ ομ/φα στο $[0,2]$

Έστω $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Η $(f_n)$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[0,2]$. Το $A=[0,2]$ είναι συμπαγές άρα κάθε μια από τις $f_n$ και φραγμένη στο $[0,2]$. Άρα κάθε $f_n$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,2]$. Εάν $f(x) = e^x$, $x \in [0,2]$ $f_n \to f$ ομ/φα στο $[0,2]$. Οπότε με εφαρμογή της ΠΡΟΤΑΣΗΣ (ομ/φη σύγκλιση και ολοκληρωσιμότητα κατά Riemann) έχουμε

$\int_0^x f_n(u)du \to \int_0^x e^u du$ ομ/φα στο $[0,2]$ και $\int_0^x e^u du = e^x - 1$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Έστω $(F(A,\mathbb{R}), \rho_u)$ όπου $\rho_u(f,g) = \min\{1, \sup_{x\in A}|f(x)-g(x)|\}$ ο $(F(A,\mathbb{R}), \rho_u)$ είναι πλήρης μ.χ. και $C(A,\mathbb{R}) \subseteq F(A,\mathbb{R})$. Αναζητούμε προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ένα υποσύνολο $H$ του $C(A,\mathbb{R})$ είναι συμπαγές

- Σε μετρικούς χώρους η έννοια της συμπαγότητας ταυτίζεται με την έννοια της ακολουθιακής συμπαγότητας.

- Θεωρούμε ένα υποσύνολο $H$ του $C(A,\mathbb{R})$. Εάν $f \in H$, τότε $f$ συνεχής στο $A$ συνεπώς, $(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in A): |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Το $\delta$ εξαρτάται από το $\varepsilon$, από το $x$ και από τη συνάρτηση $f$. Εάν $\exists\ \delta > 0$ έτσι ώστε να είναι το ίδιο $\forall f \in H$, τότε λέμε ότι $H$ είναι ισοσυνεχές.

- Έστω $x_0 \in A$ και $H \subseteq C(A,\mathbb{R})$. Τότε λέμε ότι το $H$ είναι ισοσυνεχές στο $x_0$ εάν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in A)\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, $\forall f \in H$.

- Θα λέμε ότι το $H$ είναι ισοσυνεχές στο $A$ εάν είναι ισοσυνεχές σε κάθε $x_0 \in A$.

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ 1** Εάν $H \subseteq C(A,\mathbb{R})$ είναι πεπερασμένο τότε $H$ είναι ισοσυνεχές. Πράγματι, έστω $H = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ τότε, εφόσον κάθε $f_i$ είναι συνεχής στο $A$ έπεται $(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_i > 0)(\forall y \in A)$: $|x-y| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$. Οπότε, εάν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ τότε $(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\forall y \in A): |x-y| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Οπότε, $H$ ισοσυνεχής.

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2** Εάν $H_1, H_2, \dots, H_k$ είναι ισοσυνεχή υποσύνολα του $C(A,\mathbb{R})$ τότε, $H = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k$ είναι ισοσυνεχές.

**ΠΡΟΤΑΣΗ**

Έστω $(f_n)$ μια ακολουθία στον $C(A,\mathbb{R})$ και $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$, $f \in F(A,\mathbb{R})$. Εάν $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχές, τότε η $f$ είναι συνεχής στο $A$ και $\{f_n, f : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχής.

## Απόδειξη

- Έστω $x \in A$ και $\varepsilon > 0$. Εφόσον $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχής στο $A$ είναι και στο $x \in A$, άρα $(\exists \delta > 0)(\forall y \in A) : |x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Οπότε $|f(x) - f(y)| = |\lim_n f_n(x) - \lim_n f_n(y)| = \lim_n |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$. Άρα η $f$ είναι συνεχής. Οπότε $\{f_n, f : n \in \mathbb{N}\} = \{f_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$ είναι ισοσυνεχές ως ένωση 2 ισοσυνεχών.

## Παρατήρηση

Το $\delta$ της συνέχειας της $f$ στο σημείο $x$ είναι το ίδιο με $\delta$ της ισοσυνέχειας του συνόλου $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ στο σημείο $x$.

## Πρόταση

- Έστω $A$ συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ισοσυνεχής ακολουθία του $C(A, \mathbb{R})$. Εάν $f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$ στο $A$, όπου $f \in F(A, \mathbb{R})$, τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $A$.

## Απόδειξη

- Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω του ότι $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχής στο $x \in A$ οπότε $\exists\, \delta_x > 0$ τ.ω. ώστε $(\forall y \in A) : |x-y| < \delta_x \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (*). Θέτουμε $V_x = B(x, \delta_x)$. Τότε η συλλογή $\{V_x : x \in A\}$ αποτελεί ανοιχτή κάλυψη για το συμπαγές $A$. Επομένως $\exists \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ τ.ω. $A \subseteq V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \ldots \cup V_{x_k}$. Εφόσον $f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$ στο $A$, έχουμε $f_n(x_i) \to f(x_i)$ $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, οπότε $\exists n_i \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_i$ $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Επιλέγοντας $n_0 = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ έχουμε $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall n \geq n_0$, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ (1). Εάν $y \in A \subseteq V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \ldots \cup V_{x_k} \Rightarrow \exists x_i : y \in V_{x_i} \Rightarrow |y - x_i| < \delta_{x_i} \overset{(*)}{\Longrightarrow} |f_n(x_i) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (2). Επιπλέον, εφόσον $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ ισοσυνεχής και $f_n \xrightarrow{\text{ισ}} f$, οπότε λόγω προηγούμενης ΠΡΟΤΑΣΗΣ, $f$ συνεχής στο A (και το δ της συνέχειας της $f$ στο $x_i$ είναι το δ$x_i$)

Οπότε, $|f_n(y) - f(y)| \leq |f_n(y) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)|$

$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Άρα, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : |f_n(y) - f(y)| \leq \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$, $\forall y \in A$. Άρα $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A.

## ΘΕΩΡΗΜΑ (ARZELA - ASCOLI)

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $H \subseteq C(A, \mathbb{R})$. Το H είναι συμπαγές αν-ν το H είναι κλειστό φραγμένο και ισοσυνεχές.

## ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν S φραγμένο υποσύνολο ενός μ.χ. $(X, \rho)$ τότε $\overline{S}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $(X, \rho)$

## ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν A συμπαγές του $\mathbb{R}^n$ και $H \subseteq C(A, \mathbb{R})$ ισοσυνεχές τότε και $\overline{H} \subseteq C(A, \mathbb{R})$ ισοσυνεχές

## ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n}{x}}$, $x \in [1, 5]$. Να εξεταστεί ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Η $f_n$ είναι συνεχής στο $[1,5]$ $\forall n$. Επίσης, $A \in [1,5]$ συμπαγές του $\mathbb{R}$. Επιπλέον, κάθε $f_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, είναι παραγωγίσιμη στο $(1,5)$ και $f_n'(x) = \left(\frac{1}{n^2} e^{-n/x}\right)' = \ldots = \frac{1}{nx^2} e^{-n/x}$

Οπότε $|f_n'(x)| = \frac{1}{nx^2} e^{-n/x} \leq \frac{1}{n \cdot 1} \frac{1}{e^{n/5}} \leq \frac{1}{n} \leq 1$. Συνεπώς, εάν $x \in [1,5]$ και $y \in [1,5]$, τότε $\exists \xi \in (1,5)$ τω $f_n(x) - f_n(y) = f_n'(\xi)(x-y)$. Άρα εάν $|x-y| < \delta$, τότε $|f_n(x) - f_n(y)| = |f_n'(\xi)||x-y| \leq$

$|x-y|<\delta$. Άρα για $\varepsilon>0$, επιλέγοντας $\delta<\varepsilon$. Έχουμε, ότι $|x-y|<\delta \Rightarrow$ $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon \ \forall n\in\mathbb{N}$. Άρα $\{f_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχής ακολουθία στον $C(A,\mathbb{R})$. Επίσης, εάν $x\in[1,5]$ τότε $f_n(x)=\frac{1}{n^2}e^{-n/x}\xrightarrow{n}0$. Εάν

$f(x)=0$, $x\in[1,5]$ τότε $f_n\xrightarrow{\kappa\sigma}f$ στο $[1,5]$. Οπότε (σύμφωνα με ΠΡΟΤΑΣΗ) $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο $[1,5]$

ΑΣΚΗΣΗ

Να εξετάσετε εάν το $H=\{f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R} : f(0,0)=0,$ $|f(x,y)-f(x',y')|\leq|x-x'|+|y-y'|\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $C(A,\mathbb{R})$ όπου $A=[0,1]\times[0,1]$

$A=[0,1]\times[0,1]$ συμπαγές του $\mathbb{R}^2$. Α.ν.δ.ο. $H$ είναι κλειστό φραγμένο και ισοσυνεχές.

ΙΣΟΣΥΝΕΧΕΣ: Έστω $(x,y)\in A$, για νδο $H$ είναι ισοσυνεχές στο $(x,y)$, α.ν.δ.ο. $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall(x',y')\in A)$ $\|(x,y)-(x',y')\|<\delta\Rightarrow$ $|f(x,y)-f(x',y')|<\varepsilon \ \forall f\in H$. Όμως, $|f(x,y)-f(x',y')|\leq|x-x'|+|y-y'|\leq$

$2\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}=2\|(x,y)-(x',y')\|$. Συνεπώς, εάν $(\varepsilon>0)$ επιλέγοντας $\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$, έχουμε ότι $\|(x,y)-(x',y')\|<\delta\Rightarrow$

$|f(x,y)-f(x',y')|<\varepsilon \ \forall f\in H$. Άρα $H$ είναι ισοσυνεχές

ΦΡΑΓΜΕΝΟ: Εάν $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]=A$, τότε $|f(x,y)|=|f(x,y)-f(0,0)|\leq$ $\leq|x|+|y|\leq1+1=2$, οπότε $\sup_{x\in A}|f(x,y)|\leq2\Rightarrow\|f\|\leq2$, $\forall f\in H$. Άρα $H$ φραγμένη

ΚΛΕΙΣΤΟ: Το $H$ είναι κλειστό του $C(A,\mathbb{R})$ διότι αν $\{f_n\}\subseteq H$ και $f_n\xrightarrow{\text{ομ}}f$, τότε $f\in C(A,\mathbb{R})$ (ως ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων). Επιπλέον $\underset{\overset{\|}{0}}{f_n(0,0)}\to f(0,0)$. (λόγω μοναδικότητας του κ.σ. ορίου). $f(0,0)=0$. Επίσης αν $(x,y)$, $(x',y')\in A$ τότε

$|f(x,y)-f(x',y')| \leq |f(x,y)-f_n(x,y)| + |f_n(x,y)-f_n(x',y')| + |f_n(x',y')-f(x',y')|$ (Δ)

Αλλά $f_n \to f$ ομ/φα, συνεπώς $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}): |f_n(x,y)-f(x,y)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, $\forall (x,y) \in A$. Αλλά $f_n \to f$ ομ/φα, συνεπώς $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}): |f_n(x,y)-f(x,y)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, $\forall (x,y) \in A$. Άρα, από (Δ), έχουμε $|f(x,y)-f(x',y')| \leq \varepsilon + |x-x'| + |y-y'| + \varepsilon$, παίρνοντας $\varepsilon \to 0$ $|f(x,y)-f(x',y')| \leq |x-x'| + |y-y'|$